

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\lfloor x-2 \rfloor) - \sqrt{\lfloor |x-1| - 3 \rfloor}}} + \log_{\lfloor x-2 \rfloor} |x|$$

PREGUNTA 2

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x-6| & ; x < -2 \\ \lfloor 2^{x-1} \rfloor & ; x \in (-1; 3] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x-1 & ; x \in (-2; 2) \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{2x-6}{x+4}\right) & ; x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty) \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de la función $k = f + g$

PREGUNTA 3

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & ; x \in [-5; -1] \\ \frac{2(x+1)}{x-1} & ; x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2 - 16) & ; x \leq 0 \\ \log_3(2^x - 1) & ; x > 0 \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de $f \circ g$

1) Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \operatorname{Sgn}\left(\frac{x-5}{|x|-2}\right) + 2x \left\| \frac{x}{4} \right\| \quad \text{Donde } \left| \frac{x^2}{4} - 2 \right| \leq 2$$

$$g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & x \in [0, 2) \\ \sqrt{x^2 - 4} & x \in [2, 6) \end{cases}$$

Hallar $(f + g)_{(x)}$, trazar su gráfica indicando su rango.

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ \sqrt{x^2+16} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{x^2-4} & x > 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 21 & x \in [\sqrt{3}, 2] \\ \frac{|x-2|-1}{|x+3|} & x \in (0, 2] \end{cases}$$

Si se cumple que: $f^* = h \circ g$, determinar si existe la función h . Justificar procedimiento.

3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(|x+10| + |x+5|)}{x} & -10 \leq x \leq -5 \\ \frac{x^2 - 2x + 5}{4} & -5 < x \leq 1 \\ \frac{1}{1 - \sqrt{8 + 2x - x^2}} & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle f^* .

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

- a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(3x) + \sinh^2(3x) = 1$ (1.5 ptos)
- b) Si $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, entonces $\operatorname{dom}(f) = \langle -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty \rangle$. (1pto)
- c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = -\operatorname{sgn}(x)$. (1pto)
- d) El inverso de $f(x) = 3^x$ es $g(x) = \log_3 x$. (1.5 ptos)

2. Dados (a, b) y (c, d) intervalos abiertos, con $b \leq c$, y las funciones estrictamente crecientes $f_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$. Considere la función $f : (a, b) \cup (c, d) \rightarrow \exp(\operatorname{Ran}(f_1)) \cup \operatorname{Ran}(f_2)$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} (\exp \circ f_1)(x), & \text{Si } x \in (a, b), \\ f_2(x) & \text{Si } x \in (c, d). \end{cases}$$

Muestre la siguiente proposición: f es monótona si y solo si para todo z_1, z_2 tales que $z_1 \in \exp(\operatorname{Ran}(f_1))$ y $z_2 \in \operatorname{Ran}(f_2)$, se cumple que $z_1 \leq z_2$. (5ptos)

3. a) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función par, que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^{14}f(x) - xf(x^{13}) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

calcule $f^2(x) + g^2(x)$.

b) Sean $a, b > 0$, $\frac{a}{b} = p \in \mathbb{N}$, y f una función tal que

$$f(x) = \left((a-b) \cos x + b \cos\left(\frac{a-b}{b}x\right) \right) r(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

donde r es una función periódica de periodo $\frac{n}{m}\pi$, para $n, m \in \mathbb{N}$ primos entre si. Si T_p es el periodo de f y T_r el periodo de r , entonces pruebe que

$$E_p = \frac{T_p}{T_r}, p \geq 1.$$

Aquí

$$E_p = \begin{cases} 2m, & p > 1 \\ 1, & p = 1 \end{cases}$$

(5ptos)